判别复方阵相似的一种新方法

福建师范大学　陈正新

2015.1.10

内容提要

内容提要

内容提要

内容提要

内容提要

相似的定义及性质

下面的内容对特征零的代数封闭域也成立.

- 定义： 设$A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$,若存在可逆矩阵$P \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 使$P^{-1}AP = B$, 则称$A, B$ 相似.
- 性质：相似矩阵有相同的特征值集合、行列式、迹、秩、特征多项式、最小多项式、 行列式因子、不变因子、初等因子、Jordan 标准形。其中特征值集合、行列式、迹、秩、特征多项式、最小多项式 相同的两方阵不一定相似。

判别矩阵相似的已有方法

(1) 一般矩阵的相似问题：

1. A, B 相似当且仅当$\lambda I - A$与$\lambda I - B$相抵。
2. 若A, B有相同的行列式因子、不变因子、初等因子、Jordan标准形，则A, B相似。

判别矩阵相似的已有方法

(2) 附加条件的矩阵相似问题：

1. 实对称矩阵A, B 相似当且仅当A, B 有相同的特征值（包括重数）。
2. 若A, B 有相同的特征值，且对任意特征值λ, rank $(\lambda I - A)$= rank $(\lambda I - B)$, 则A, B 相似。
3. 若A有个不同的特征值，则A, B 相似当且仅当A, B 有相同的特征值。

矩阵的最小多项式与相似问题

- 定义：以A为根的次数最低的首一多项式为A的最小多项式。
- 注记：相似的两方阵有相同的最小多项式。但反之不对，即两矩阵有相同的最小多项式，它们不一定相似。考虑如下矩阵：

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&2\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{pmatrix},$$

二者最小多项式均为$(\lambda-1)^2(\lambda-2)$，但它们并不相似。

- 问题：附加什么条件，具有相同最小多项式的两方阵相似？

矩阵的维数向量与相似的判别法

- 定义: 设$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, d 为A 的最小多项式的次数, $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_d$ 是A 的最小多项式的所有根(可能重复)的序列。令$n_0 = n$; 对$1 \le i \le d$, 令$n_i = rank(\Pi_{j=1}^{i}(A - \xi_j I_n))$. 称$(n_0, n_1, \cdots, n_d)$ 为A 的维数向量.
- 注记: $n_0 = n > n_1 > n_2 > \cdots > n_d = 0$。

矩阵的维数向量与相似的判别法

- 例子：求矩阵$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}$的维数向量。
- 解：A, B 的最小多项式都是$(\lambda-2)(\lambda-1)^2$. 其根均为$\xi_1=2, \xi_2=1, \xi_3=1$. A 的维数向量的分量分别为$n_0^A=4$,

  $n_1^A=\text{rank }(A-2I)=\text{rank}\begin{pmatrix}-1&&&\\1&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}=3,$

  $n_2^A=\text{rank}(A-2I)(A-I)=\text{rank}\begin{pmatrix}-1&&&\\1&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&&&\\1&0&&\\&&0&\\&&&1\end{pmatrix}=1,$

  $n_3^A=\text{rank}(A-2I)(A-I)(A-I)=0,$

  即A 的维数向量为$(n_0^A, n_1^A, n_2^A, n_3^A)=(4,3,1,0)$。

矩阵的维数向量与相似的判别法

- 类似的，对矩阵B, 它的维数向量的分量为

  $n_0^B = 4,$

  $n_1^B = \text{rank}\,(B-2I) = 2,$

  $n_2^B = \text{rank}(B-2I)(B-I) = 1,$

  $n_3^B = 0,$

  即B 的维数向量为$(n_0^B, n_1^B, n_2^B, n_3^B) = (4,2,1,0)$。因此, A 与B 的维数向量不同。

矩阵的维数向量与相似的判别法

- 定理：设$A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_d$ 是A 的最小多项式的所有复数根, $(n_0, n_1, \cdots, n_d)$为A 的维数向量(相对于所选择的排序), 则A, B 相似当且仅当B 也有相同的最小多项式和维数向量(相对于同样排序),即:
  $\mathrm{rank}\ (\Pi_{j=1}^{i}(B-\xi_j I_n)) = n_i,\ 1 \le i \le d.$
- 例：矩阵
  $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
  不相似。(它们的最小多项式相同, 但维数向量不同.
  $(n_0^A, n_1^A, n_2^A, n_3^A) = (4,3,1,0), (n_0^B, n_1^B, n_2^B, n_3^B) = (4,2,1,0)).$

最小多项式的求法

上述判别法的关键是最小多项式的求法。下面是求最小多项式的若干重要结论:

1. 若$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}$, A_i 为方阵，A_i 的最小多项式为$g_i(\lambda)$, $1 \leq i \leq s$, 则A 的最小多项式为$[g_1(x), g_2(x), \cdots, g_s(x)]$.
2. k 级若当块$J = \begin{pmatrix} a & & & \\ 1 & a & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & a \end{pmatrix}$的最小多项式为$(\lambda - a)^k$。
3. A 的最小多项式是n 阶行列式因子（即特征多项式）被$n-1$阶行列式因子除而得的商式.
4. A 的最小多项式整除特征多项式，且它们有相同的不可约因式.

最小多项式的求法

- 例 求$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$的最小多项式.
- 解 A 的特征多项式$|\lambda I-A|=\lambda^2(\lambda-5)$, 则$A$ 的最小多项式为$\lambda^2(\lambda-5)$ 或$\lambda(\lambda-5)$。经检验, $A(A-5I)=0$, 从而A 的最小多项式为$\lambda(\lambda-5)$.

结束

谢谢！